

Corso di
***Dinamiche dei Gruppi Virtuali e dei Social
Networks***
a.a. 2018-2019

Dr. Andrea Guazzini
*Department of Education and Psychology
and Centre for the Study of Complex Dynamics (CSDC)
University of Florence*

Contacts

e-mail: andrea.guazzini@unifi.it - andrea.guazzini@gmail.com
website: <http://virthulab.complexworld.net/>

Topic X

Graph Theory

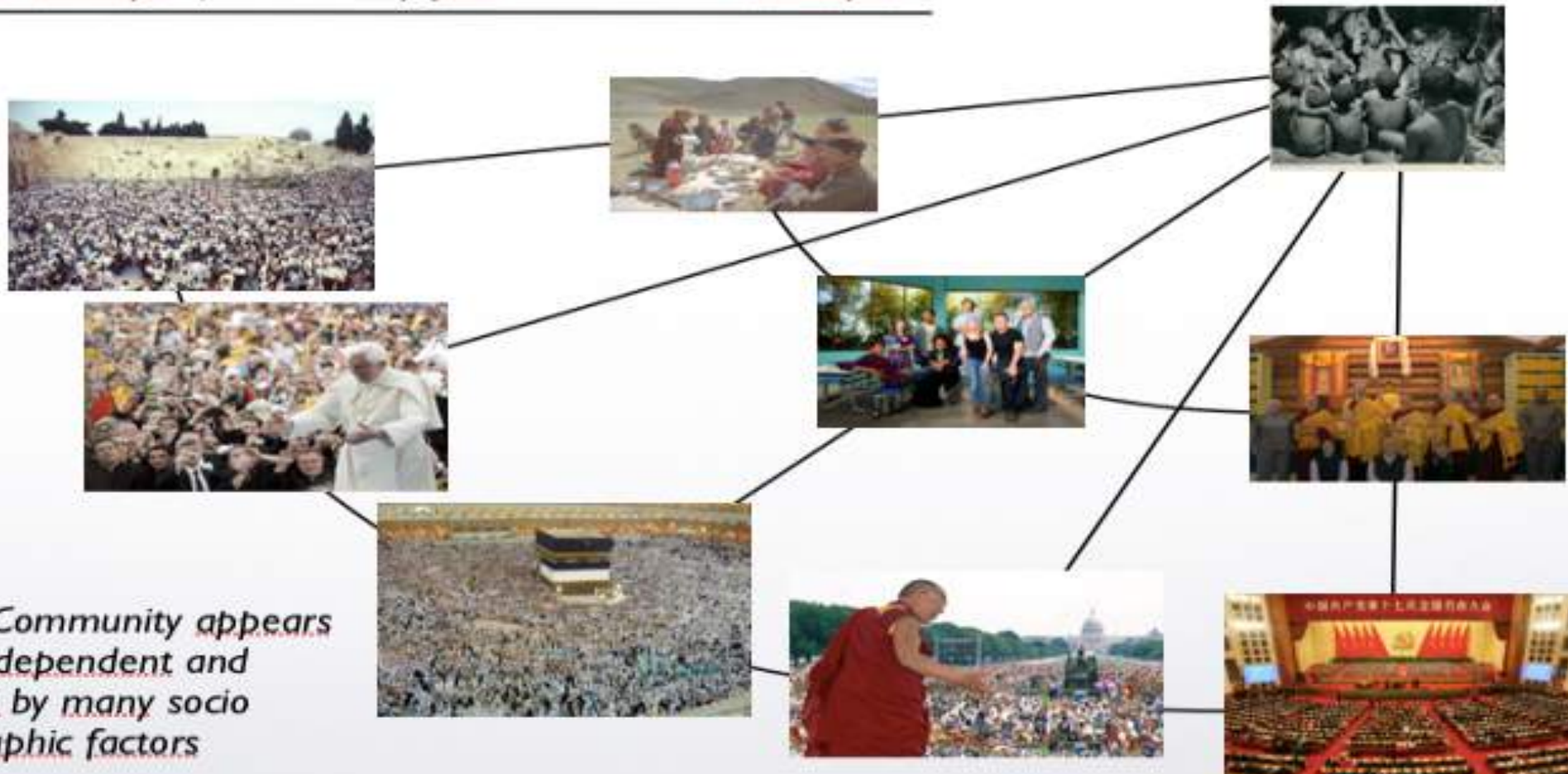
Module 1

Nodes, Links and Matrices

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

The “ambiguous” concept of Community: just some Human example



The concept of Community appears as Culture dependent and determined by many socio demographic factors

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Theoretical Key Concept

A Broad Definition of “Group”

But no matter what the nature of the relations, *a group exists when individuals are connected to one another by some type of social tie.*



These connections, or ties, may be based on strong bonds, like the links between the members of a family or a clique of close friends. The links may also be relatively weak ones that are easily broken with the passage of time or the occurrence of relationship-damaging events. Even weak ties, however, can create robust outcomes, such as when a group member you hardly know provides you with critical information that is common knowledge in that person’s social circles (Granovetter, 1973).

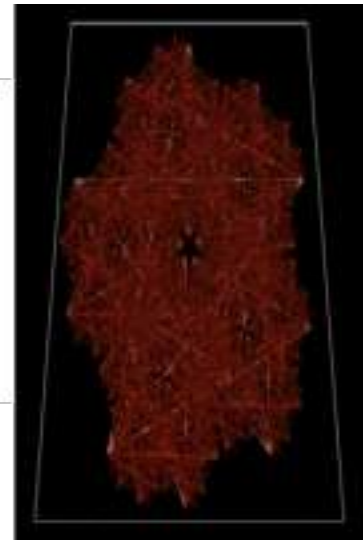
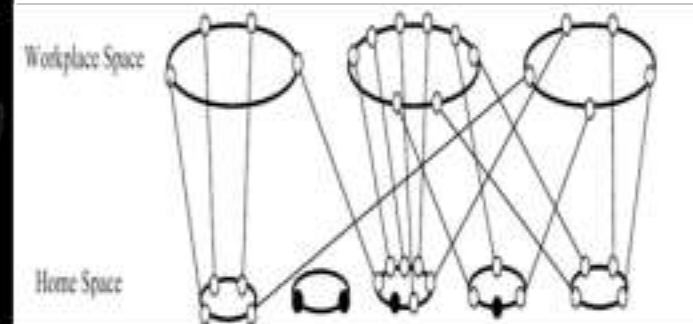
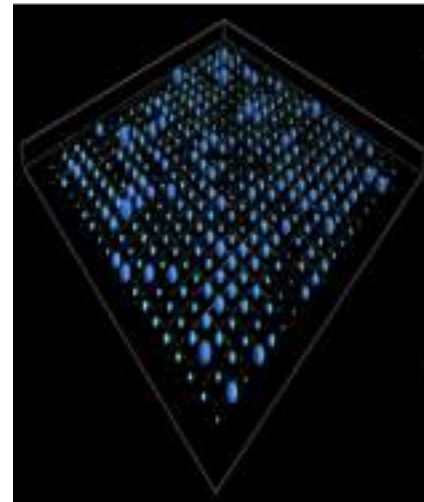
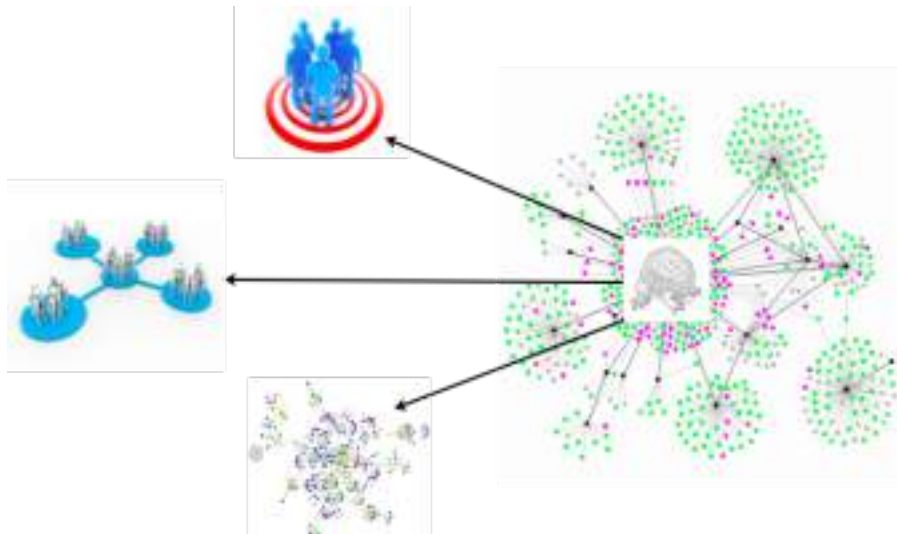
Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Theoretical Key Concept

The connections

The member of any given group can be considered as connected like a series of networked computers. But these connections, or social ties, are not of one type (i.e., multiplex networks) and do not lie on a single/simple space.



Theoretical Key Concept

The Number of Connections (Links) of a Group (Network)

The larger the group, the more ties are needed to join members to each other and to the group. The maximum number of ties within a group in which everyone is linked to everyone else is given by the equation

$$\text{Links} = \frac{n(n - 1)}{2}$$

But only if the graph style we choose is “undirected” and “not weighted” but in order to fill this gap, please stop here for a moment and make a step sideward, toward the graph theory

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

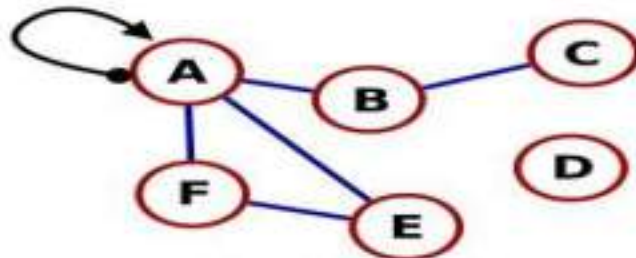
Network: definizioni operative

Grafi o Network: definizioni operative

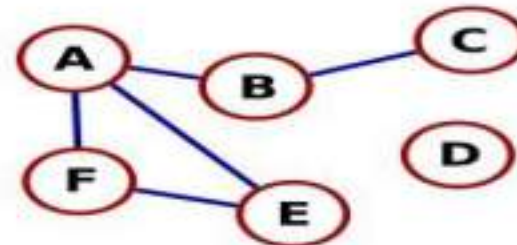
I **grafi** sono strutture matematiche discrete che rivestono interesse sia per la matematica che per un'ampia gamma di campi applicativi. Un grafo è un insieme di elementi detti *nodi* o *vertici* collegati fra loro da *archi* o *lati*. Più formalmente, si dice grafo una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei nodi ed E insieme degli archi, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V .

Due vertici u, v connessi da un arco e prendono nome di "estremi dell'arco"; l'arco e viene anche identificato con la coppia formata dai suoi estremi (u, v) .

Un arco che ha due estremi coincidenti si dice *ricorsivo*.



Grafo con 6 nodi e 5 archi
ricorsivo



Grafo con 6 nodi e 5 archi
non ricorsivo

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Network: definizioni operative

Vertici e Links

Il **Nodo o Vertice** di un network rappresenta l'unità elementare o microscopica del grafo, e quindi ne indica le unità statistiche.

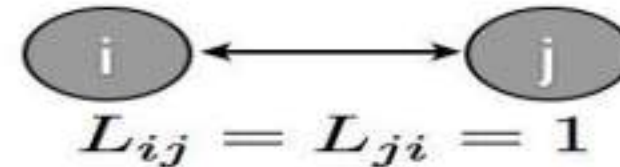
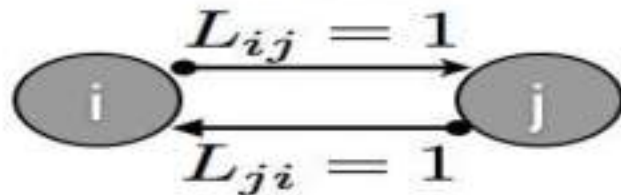


Il **Link** rappresenta invece la relazione esistente tra due Nodi e genericamente questa può essere rappresentabile in forma Discreta o Continua, Diretta o Non Diretta.

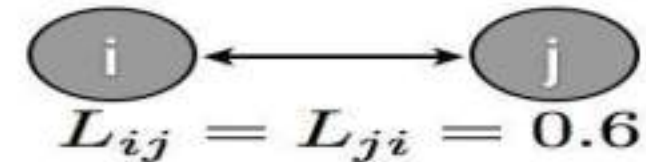
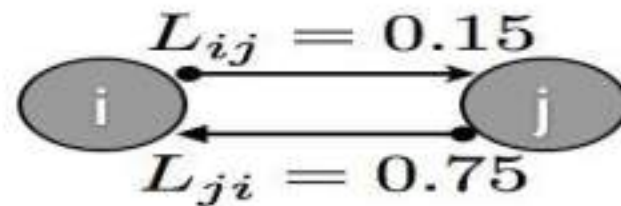
Diretta

Non Diretta

Discreta



Continua



Andrea Guazzini

andrea.guazzini@gmail.com andrea.guazzini@unifi.it www.complexworld.net

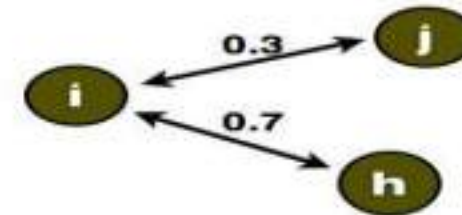
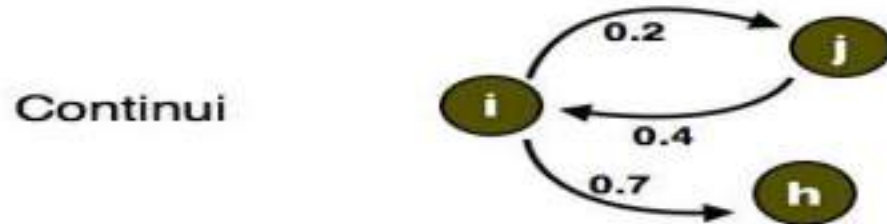
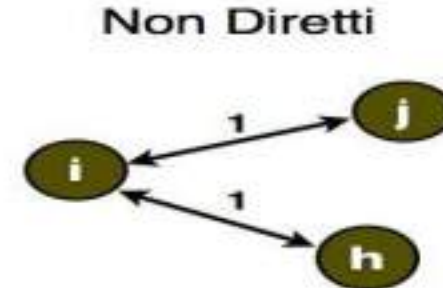
Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Network: definizioni operative

Rappresentazione di Un Network

In funzione della modalità con la quale si rappresentano gli archi, si ottengono quattro tipologie generali di network



Topic X – Graph Theory

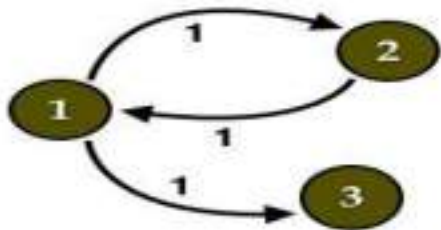
Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Network: definizioni operative

Rappresentazione Matriciale di Network

Un network può comodamente essere rappresentato sotto forma di matrice in vari modi.

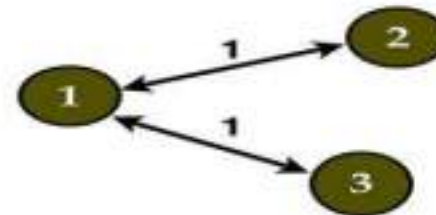
Discreti



Diretti

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	0	0	0

Matrice di Adiacenza
Asimmetrica

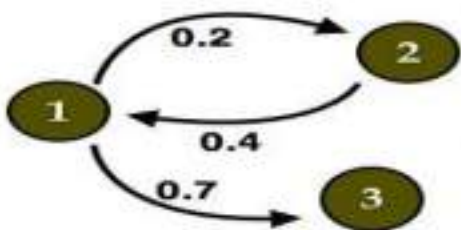


Non Diretti

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	0

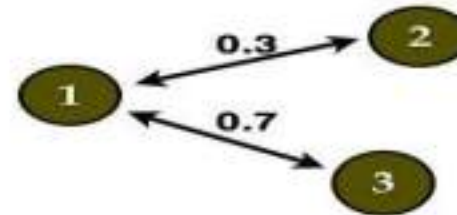
Matrice di Adiacenza
Simmetrica

Continui



	1	2	3
1	0	0.2	0.7
2	0.4	0	0
3	0	0	0

Matrice Pesata
Asimmetrica



	1	2	3
1	0	0.3	0.7
2	0.3	0	0
3	0.7	0	0

Matrice Pesata
Simmetrica

Andrea Guazzini

andrea.guazzini@gmail.com andrea.guazzini@unifi.it www.complexworld.net

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Network: definizioni operative

Rappresentazione Matriciale di Network

Un network può comodamente essere rappresentato sotto forma di matrice in vari modi.

		1	2	3	Statica	Dinamica
A		1	2	3		
		0	1	1	$a_{ij} \in A$	$a_{ij}^t \in A^t$
		1	0	0		
		0	0	0		
	Matrice di Adiacenza <i>Asimmetrica</i>					
W		1	2	3		
		0	0.2	0.7	$w_{ij} \in W$	$w_{ij}^t \in W^t$
		0.4	0	0		
		0	0	0		
	Matrice Pesata <i>Asimmetrica</i>					

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Network: definizioni operative

Rappresentazione Matriciale di Network

Un network può comodamente essere rappresentato sotto forma di matrice in vari modi.

A

	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	0

Matrice di Adiacenza
Simmetrica

W

	1	2	3
1	0	0.3	0.7
2	0.3	0	0
3	0.7	0	0

Matrice Pesata
Simmetrica

Statica

$$a_{ij} = a_{ji} \in A$$

Dinamica

$$a_{ij}^t = a_{ji}^t \in A^t$$

$$w_{ij} = w_{ji} \in W$$

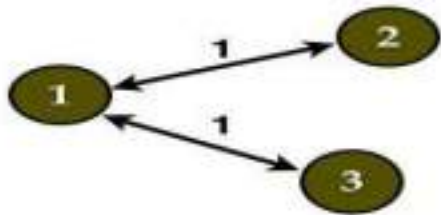
$$w_{ij}^t = w_{ji}^t \in W^t$$

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Grado o Connettività di un Nodo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	0

Matrice di Adiacenza
Simmetrica

$$K_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N a_{ij}$$

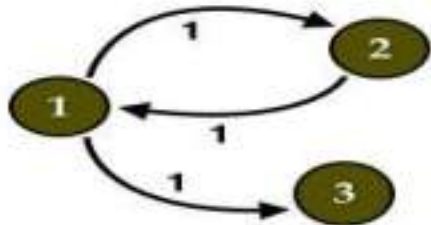
Nodo	Grado
1	2
2	1
3	1

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Grado o Connettività di un Nodo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	0	0	0

Matrice di Adiacenza
Asimmetrica

$$K_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N a_{ij}$$

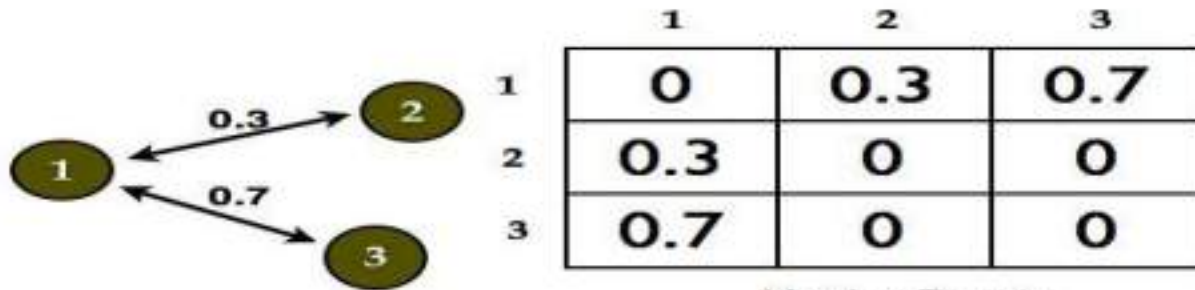
Nodo	Grado
1	2
2	1
3	0

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Grado o Connettività di un Nodo



Matrice Pesata
Simmetrica

$$K_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N w_{ij}$$

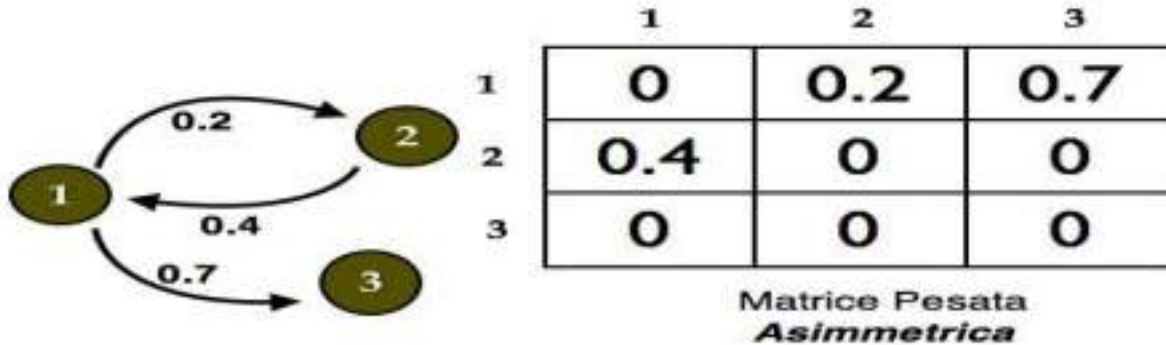
Nodo	Grado
1	1.0
2	0.3
3	0.7

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Grado o Connettività di un Nodo



$$K_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N w_{ij}$$

Nodo	Grado
1	0.9
2	0.4
3	0

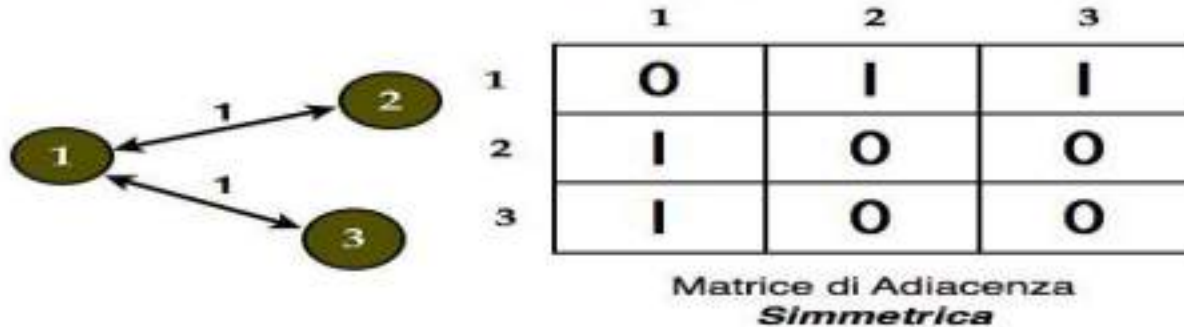
Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Grado di Centralità di un Nodo

Il Grado di Centralità indica quanto è importante il nodo all'interno del network di cui fa parte



$$C_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N \frac{a_{ij}}{N-1}$$

Nodo	Centrality
1	1
2	0.5
3	0.5

Quando il grado massimo ed il grado minimo coincidono con un numero k , si è in presenza di un "grafo k -regolare" (o più semplicemente "grafo regolare").

Un grafo $G = (V, \emptyset)$ privo di archi è detto "grafo nullo".

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Betweenness di un Nodo

La Betweenness di un nodo indica quanto il nodo è strutturale per il network



$$B_i = \sum_{\forall j \neq i \neq l} \frac{S_{jl}(i)}{S_{jl}}$$

$$S_{jl}(i)$$

Numero dei cammini minimi tra j e l contenenti il nodo i

$$S_{jl}$$

Numero dei cammini minimi tra j e l totale

* Il cammino minimo (Shortest Path) tra i nodi i e j è definito come il più breve percorso tra due nodi.

** Ovviamente questo assume significati matematici diversi in funzione della rappresentazione Discreta o Continua del link!

Tanto più è grande il numero di cammini minimi passanti da un nodo i, tanto più grande è la sua betweenness

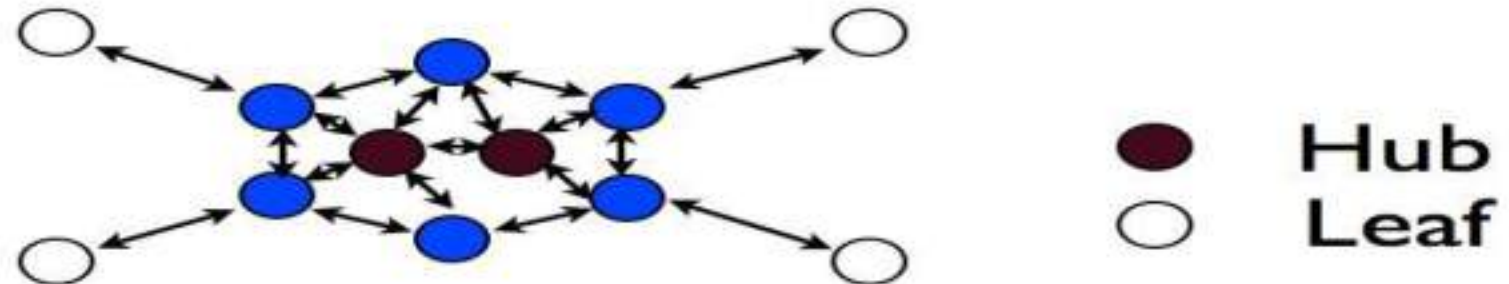
Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

HUBS & LEAVES

I nodi che hanno un alto grado di Centralità sono detti Hubs, mentre quelli con centrality bassa sono solitamente definiti foglie. Il loro ruolo all'interno della diffusione delle informazioni all'interno di un network può essere significativamente diverso e non banale.



Different worlds and one Language

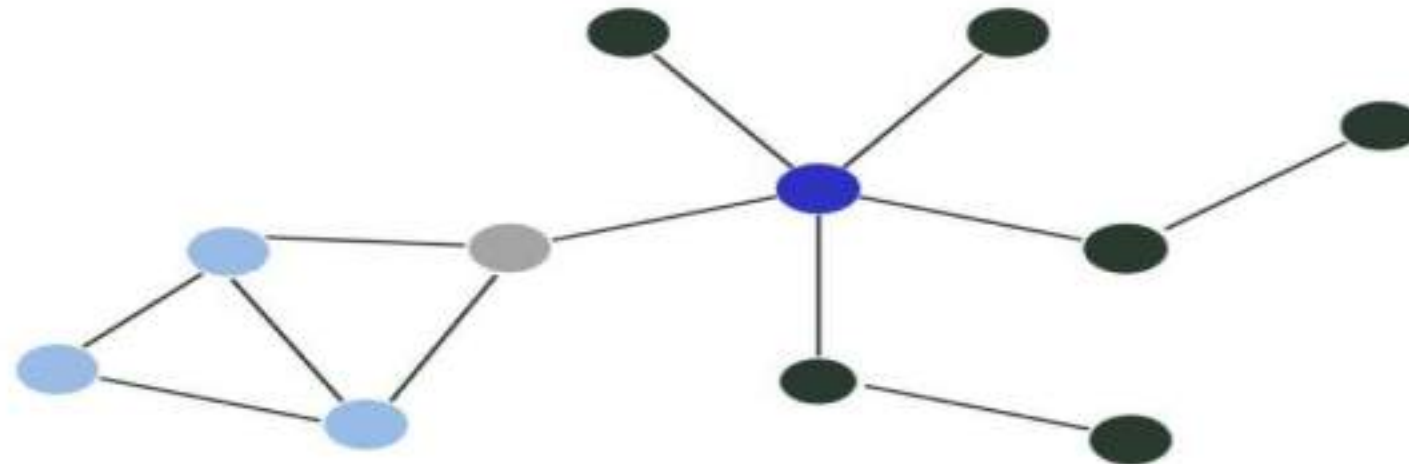


Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratterizzazione Nodo

Centralità, Grado e Betweenness: A complex Hystory



- Higher Density
- Higher Betweenness Degree
- Higher Centrality Degree

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratteristiche del Network

La descrizione globale del network

Quando ci spostiamo dalla descrizione delle unità microscopiche di un network (i nodi), alle proprietà Globali del grafo che lo rappresenta, oltre alle vecchie dimensioni osservabili, nascono e possono essere definite nuove emergenti proprietà.



Grado Medio

$$\bar{K}_G = \frac{\sum_i^N \sum_{i \neq j, j=1}^N a_{ij}}{N}$$

Centrality Media

$$\bar{C}_G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j, j=1}^N \frac{a_{ij}}{N-1}}{N}$$

Betweenness Media

$$\bar{B}_G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{\forall j \neq i \neq l} \frac{S_{jl}(i)}{S_{jl}}}{N}$$

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratteristiche del Network

Shortest Path & Diameter

Il Diametro di un Network è definito dal più lungo dei cammini minimi esistenti all'interno del network.



Diameter
2



Diameter
 $N/2$



Diameter
N

Ovviamente la questione diventerà meno triviale con i
Multinested Complex
Network

Workplace Space

Home Space



Andrea Guazzini

andrea.guazzini@gmail.com andrea.guazzini@unifi.it www.complexworld.net

Topic X – Graph Theory

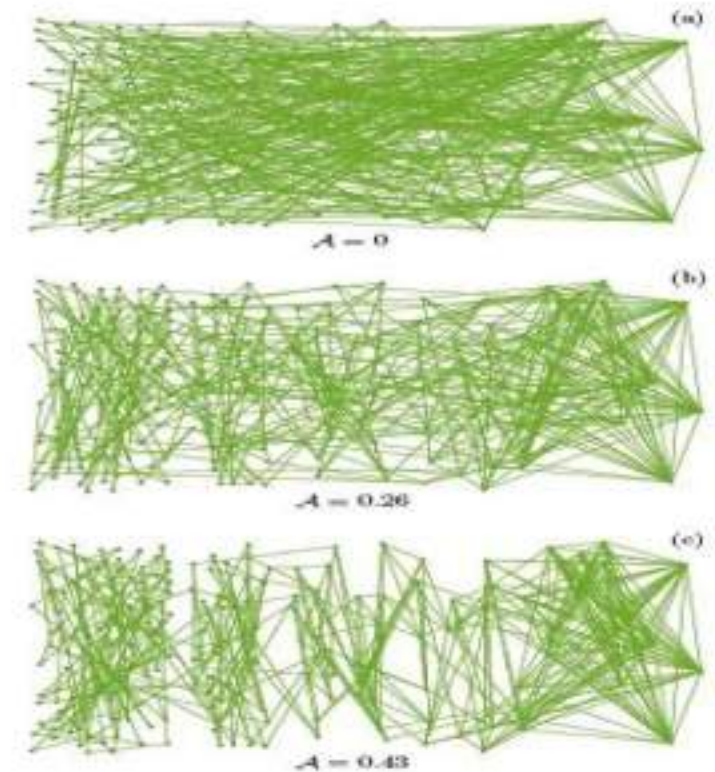
Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratteristiche del Network

Assortativity of a Network

Assortativity, or **assortative mixing** is a preference for a network's nodes to attach to others that are similar in some way. Though the specific measure of similarity may vary, network theorists often examine assortativity in terms of a node's **degree**. The addition of this characteristic to network models more closely approximates the behaviors of many real world networks.

Correlations between nodes of similar degree are often found in the **mixing patterns** of many observable networks. For instance, in **social networks**, highly connected nodes tend to be connected with other high degree nodes. This tendency is referred to as **assortative mixing**, or **assortativity**. On the other hand, technological and biological networks typically show **disassortative mixing**, or **dissortativity**, as high degree nodes tend to attach to low degree nodes



Assortativity is often operationalized as a **correlation** between two nodes. However, there are several ways to capture such a correlation. The most prominent measures remains the **assortativity coefficient**.

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Caratteristiche del Network

Assortativity of a Network

The *assortativity coefficient* is the Pearson correlation coefficient of degree between pairs of linked nodes.[2] Positive values of r indicate a correlation between nodes of similar degree, while negative values indicate relationships between nodes of different degree.

When $r = 1$, the network is said to have perfect assortative mixing patterns, when $r = 0$ the network is non-assortative, while at $r = -1$ the network is completely disassortative.

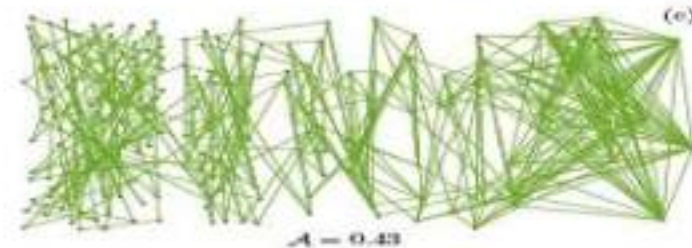
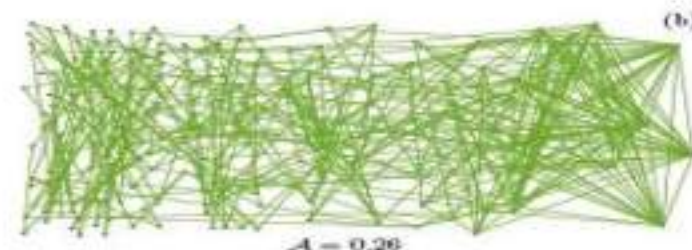
$$r = \frac{\sum_{jk} jk(e_{jk} - q_j q_k)}{\sigma_q^2}$$

q_k Number of edges leaving the node (but different to the jk)

e_{jk} Refers to the joint probability distribution of the remaining degrees of the two vertices. This quantity is symmetric on an undirected graph, and follows the sum rules

$$\sum_{jk} e_{jk} = 1$$

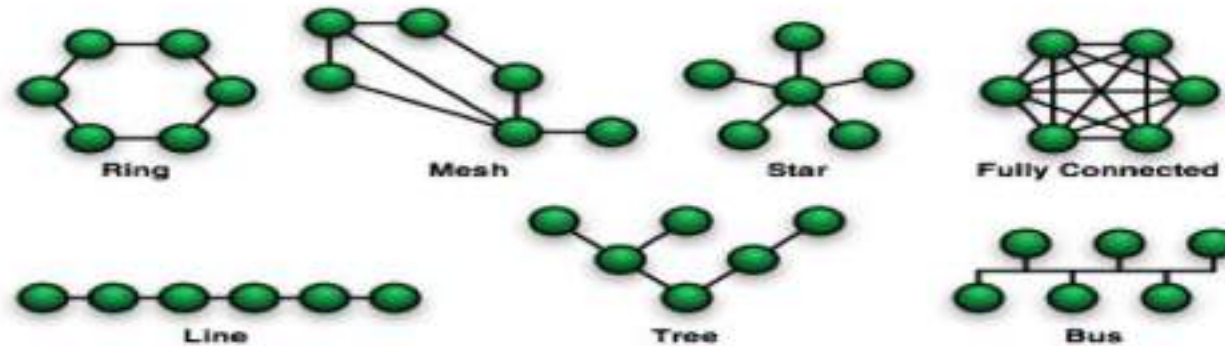
$$\sum_j e_{jk} = q_k$$



Topologia di un Network

Topologia di un Network

una **topologia di rete** è la rappresentazione della struttura geometrica di una rete di relazioni



Un nodo può avere una o più connessioni con gli altri secondo differenti schemi. La topologia di rete è determinata soltanto dalla configurazione dei collegamenti tra i nodi. Per la precisione, solitamente non riguardano la topologia di rete: le distanze tra i nodi, le interconnessioni fisiche, le velocità di trasmissione, i tipi di segnale.

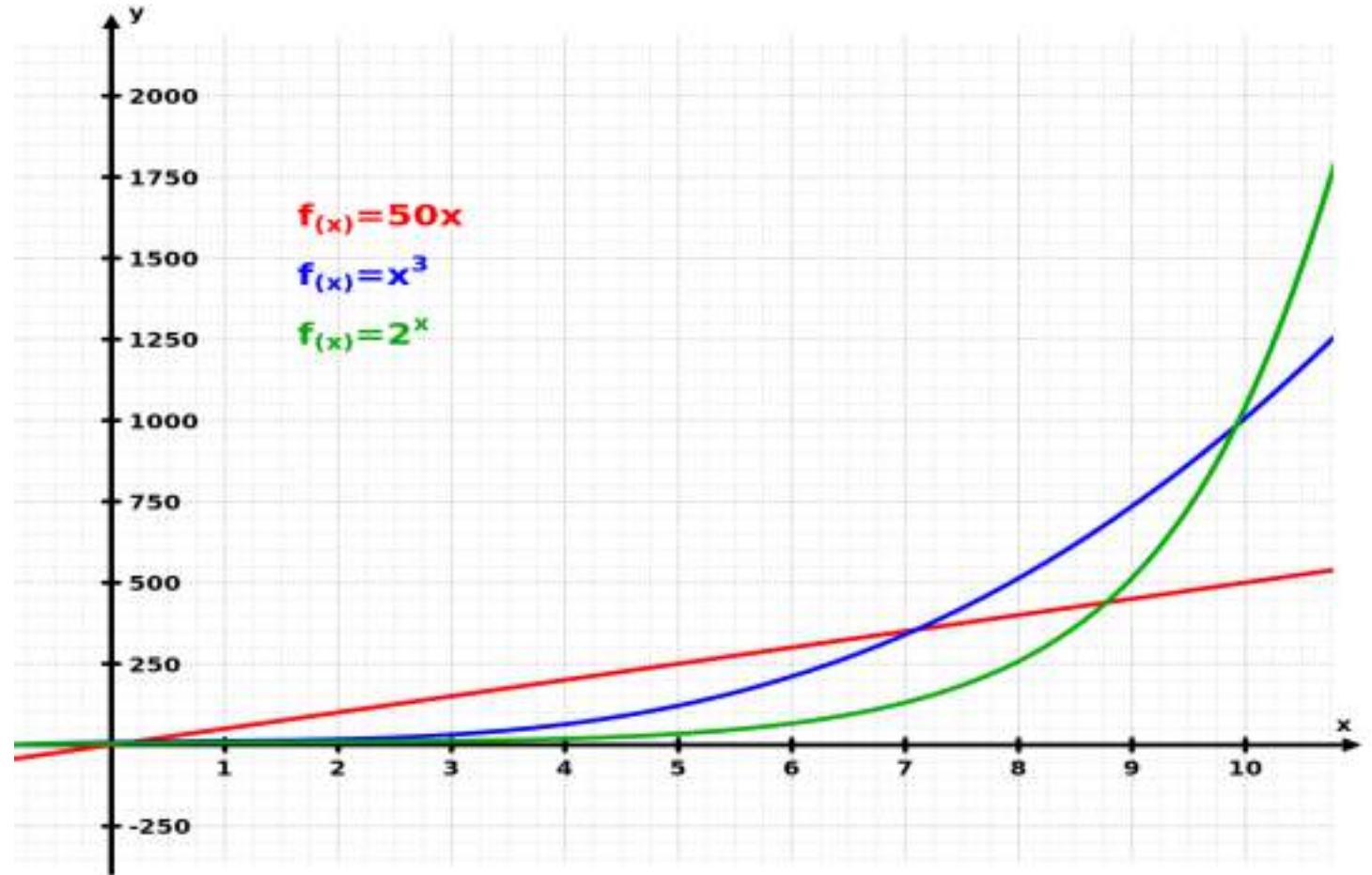
Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

The larger the group, the more ties are needed to join members to each other and to the group. The maximum number of ties within a group in which everyone is linked to everyone else is given by the equation

$$\text{Links} = \frac{n(n-1)}{2}$$

and the number of ties needed to connect all members grows exponentially as the group gets larger.



Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Main Questions from the Module X.1

Id	Question
X.1.1	What's the maximum number of possible connections within a group (Network) of n subjects (nodes)?
X.1.2	What's the definition of a Network in Graph Theory?
X.1.3	What are the definition of Nodes and Links?
X.1.4	What are the 4 typologies of Networks we can obtain modifying the modality of links representation?
X.1.5	A network representation can be symmetric or asymmetric. Make an example of the two cases.
X.1.6	What's the Degree of a Node (Grado di connettività)?
X.1.7	What's the Centrality Degree of a Node?
X.1.8	What's the difference between Degree of a Node and Centrality Degree of a Node?
X.1.9	What's the betweenness of a Nodes?
X.1.10	Define the concepts of Hubs and Leaves in graph theory, and explain their differences.
X.1.11	How Degree, Centrality and Betweenness can be used to characterize a Network?

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Main Questions from the Module X.1

Id	Question
X.1.12	What's the definition of Diameter of a Network?
X.1.13	What's the Topology of a Network?
X.1.14	What's the relation between the number of nodes of a network (people) and the maximum number of possible connections within the network?

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Main Questions from the Module X.1

Id	Answers
X.1.1	<p>The larger the group, the more ties are needed to join members to each other and to the group. The maximum number of ties within a group in which everyone is linked to everyone else is given by the equation:</p> $Links = \frac{n(n-1)}{2}$ <p>But only if the graph style we choose is “undirected” and “not weighted” but in order to fill this gap, please stop here for a moment and make a step sideward, toward the graph theory</p>
X.1.2	<p>I grafi sono strutture matematiche discrete che rivestono interesse sia per la matematica che per un'ampia gamma di campi applicativi. Un grafo è un insieme di elementi detti nodi o <u>vertici</u> collegati fra loro da archi o lati. Più formalmente, si dice grafo una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei nodi ed E insieme degli archi, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V</p> <p>Due vertici u, v connessi da un arco e prendono nome di "estremi dell'arco"; l'arco e viene anche identificato con la coppia formata dai suoi estremi (u, v). Un arco che ha due estremi coincidenti si dice ricorsivo.</p>
X.1.3	<p>Il Nodo o Vertice di un network rappresenta l'unità elementare o microscopica del grafo, e quindi ne indica le unità statistiche. Il Link rappresenta invece la relazione esistente tra due Nodi e genericamente questa può essere rappresentabile in forma Discreta o Continua, Diretta o Non Diretta.</p>
X.1.4	<p>In funzione della modalità con la quale si rappresentano gli archi, si ottengono quattro tipologie generali di network: <u>undirected-discrete (I), directed-discrete (II), undirected-weighted (III); directed-weighted (IV).</u></p>

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Main Questions from the Module X.1

Id	Answers
----	---------

X.1.5 .. using paper and pen!

X.1.6

Caratterizzazione Nodo

Grado o Connettività di un Nodo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	0

Matrice di Adiacenza Simmetrica

$$K_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N a_{ij}$$

Nodo	Grado
1	2
2	1
3	1

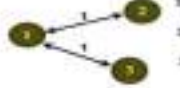
Andrea Guazzini
a.guazzini@unifi.it

X.1.7

Caratterizzazione Nodo

Grado di Centralità di un Nodo

Il Grado di Centralità indica quanto è importante il nodo all'interno del network di cui fa parte



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	0

Matrice di Adiacenza Simmetrica

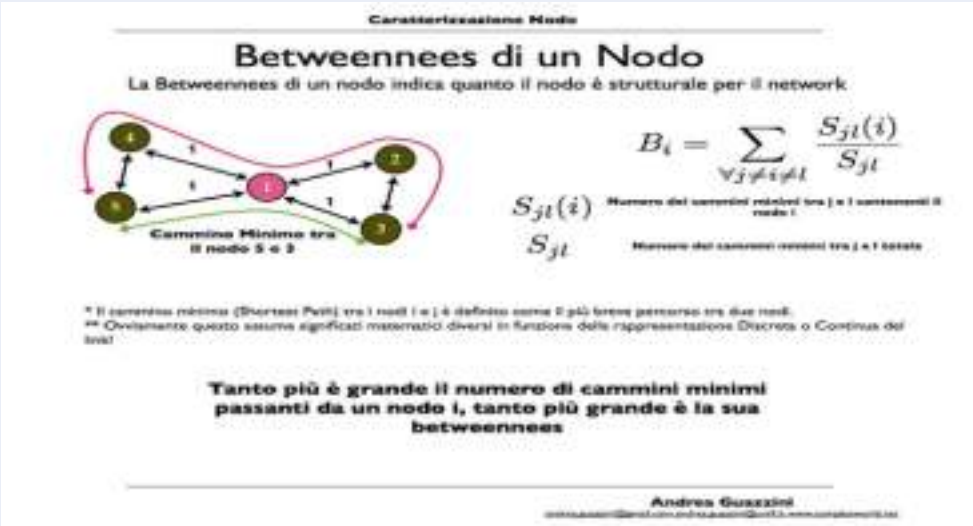
$$C_i = \sum_{i \neq j, j=1}^N \frac{a_{ij}}{N-1}$$

Nodo	Centrality
1	1
2	0.5
3	0.5

Quando il grado massimo ed il grado minimo coincidono con un numero k, si è in presenza di un "grafo k-regolare" (o più semplicemente "grafo regolare").

Un grafo G = (V, E) privo di archi è detto "grafo nullo".

Andrea Guazzini
a.guazzini@unifi.it

Id	Answers
X.1.8	The Centrality degree is the normalized degree (i.e., the degree is divided by the maximum possible number of connections of the subject i).
X.1.9	 <p>Caratterizzazione Nodo</p> <p>Betweenness di un Nodo</p> <p>La Betweenness di un nodo indica quanto il nodo è strutturale per il network</p> <p>$B_i = \sum_{j \neq i \neq l} \frac{S_{jl}(i)}{S_{jl}}$</p> <p>$S_{jl}(i)$ Numero dei cammini minimi tra j e l contenenti il nodo i.</p> <p>S_{jl} Numero dei cammini minimi tra j e l totale.</p> <p>* Il cammino minimo (Shortest Path) tra i nodi j e l è definito come il più breve percorso tra due nodi. ** Ovviamente questo assume significati differenti in funzione della rappresentazione Discreta o Continua del rete!</p> <p>Tanto più è grande il numero di cammini minimi passanti da un nodo i, tanto più grande è la sua betweenness</p> <p>Andrea Guazzini www.guazzini@uniroma1.it</p>
X.1.10	I nodi che hanno un alto grado di Centralità sono detti Hubs, mentre quelli con centrality bassa sono solitamente definiti foglie. Il loro ruolo all'interno della diffusione delle informazioni all'interno di un network può essere significativamente diverso e non banale.
X.1.11	Quando ci spostiamo dalla descrizione delle unità microscopiche di un network (i nodi), alle proprietà Globali del grafo che lo rappresenta, oltre alle vecchie dimensioni osservabili, nascono e possono essere definite nuove emergenti proprietà. Il Grado Medio, la Centrality Media e la Betweenness Media del grafo stesso.

Topic X – Graph Theory

Module 1 - Nodes, Links and Matrices

Main Questions from the Module X.1

Id	Answers
X.1.12	Il Diametro di un Network è definito dal più lungo dei cammini minimi esistenti all'interno del network.
X.1.13	Una topologia di rete è la rappresentazione della struttura geometrica di una rete di relazioni. Un nodo può avere una o più connessioni con gli altri secondo differenti schemi. La topologia di rete è determinata soltanto dalla configurazione dei collegamenti tra i nodi. Per la precisione, solitamente non riguardano la topologia di rete: le distanze tra i nodi, le interconnessioni fisiche, le velocità di trasmissione, i tipi di segnale.
X.1.14	The larger the group, the more ties are needed to join members to each other and to the group. The maximum number of ties within a group in which everyone is linked to everyone else is given by the equation $T = \frac{n(n-1)}{2}$ and the number of ties needed to connect all members grows exponentially as the group gets larger.